DU SAAR
VA IV 1923, 28-45

DE BETEEKENIS VAN DE MOIVRE'S WERK OVER LIJFRENTEN VOOR DE ONTWIKKELING VAN DE VERZEKERINGSWETENSCHAP

§ 1. In 1693 werd de eerste wetenschappelijke sterftetafel in het licht gegeven door Halley [1]) naar aanleiding van waarnemingen met betrekking tot de sterfgevallen te Breslau gedurende de jaren 1687 tot en met 1691. In het betrokken opstel wordt gesproken over de berekening van lijfrenten, doch van een min of meer stelselmatige behandeling van de kwestie is geen sprake.

Dat zijn tafel en zijn berekeningen slechts moesten worden beschouwd als een eerste poging om dergelijke kwesties te behandelen, stond in de eerste plaats bij Halley zelf vast. Het opschrift van zijn artikel zegt het al en bovendien zegt hij zelf in zijn genoemd opstel dat zijn berekeningen eerst waarde zouden krijgen wanneer zij gegrond waren op getallen over meer jaren en dat dan pas gedacht zou kunnen worden aan middelen om lijfrenten op twee en meer hoofden uit te drukken.

Toch trok Halley's artikel de aandacht en wel van De Moivre. Deze toch maakte in 1692 kennis met Halley en werd spoedig zijn beschermeling; in 1697 werd hij op voorstel van Halley gekozen tot medelid van de Royal Society.

Het duurde evenwel nog lang voordat De Moivre blijk gaf van zijn kennis van Halley's werk. Hij had het te druk met andere dingen, zoo als door mij elders [2]) is medegedeeld bij de bespreking van het leven

---

[1]) E. Halley, An estimate of the degrees of the mortality of mankind, drawn from curious tables of the births and funerals at the city of Breslaw; with an attempt to ascertain the price of annuities upon lives (Philosophical transactions XVII, 1693, pag. 596). Herdrukt in Journal of the Institute of Actuaries XVIII, pag. 251.

[2]) J. du Saar, Uit het leven van Abraham de Moivre. (De Verzekeringsbode 41e jaargang, 1922, pag. 235).

J. du Saar. De Moivre in de wetenschappelijke wereld. (De Verzekeringsbode 41e jaargang, 1922, pag. 260.)

van De Moivre en waarop dus hier niet verder wordt ingegaan. Genoeg zij om te herinneren aan zijn studie van de waarschijnlijkheidsrekening, daartoe aangezet door de werken van Huygens [1]) en Montmort [2]), waarbij hij van zijn bekwaamheid het bewijs gaf door een verhandeling „De mensura sortis" in 1711 [3]) die een goede ontvangst genoot. Dit bracht hem er toe het werk uit te breiden en zoo ontstond zijn beroemd werk over waarschijnlijkheidsrekening „The doctrine of chances" in 1718 [4]). Een paar jaar daarna kwam hij, mede doordat een uitgever hem aanzocht in bedoelde richting werkzaam te zijn opnieuw en nu meer uitvoerig tot het onderwerp dat Halley had behandeld; dit werd de aanleiding tot de verschijning in 1725 van zijn, werk over lijfrenten: Annuities upon lives[5]). Voor enkele bijzonderheden die naar aanleiding daarvan zijn op te merken verwijs ik naar vroegere artikelen [6]).

§ 2. Het feit dat het werk Annuities upon lives in een tijdvak van ongeveer dertig jaar vijf drukken beleefde (1725, 1743, 1750, 1752, 1756) spreekt reeds voor zichzelf. Het is niet slechts de goede naam die De Moivre, niet alleen in Engeland maar ook daarbuiten, had als wiskundige hetwelk aan deze vele drukken medewerkte maar het zijn ook de goede eigenschappen die het werk vertoont. Dat er tusschen de eerste en de tweede uitgave een langer tijdvak ligt dan tusschen de daaropvolgende is aan verschillende oorzaken toe te schrijven, welke we geleidelijk in deze beschouwingen zullen gewaar worden.

Laten we eerst vaststellen dat met de verschijning van de eerste uitgave in 1725 eigenlijk het eerste boek uitkwam waarin de berekening van lijfrenten als afzonderlijk onderwerp uitvoerig behandeld

---

[1]) Chr. Huygens. De ratiociniis in ludo aleae (1657).

[2]) P. R. de Montmort. Essai d'analyse sur les jeux de hasard (1708, herdrukt in 1713).

[3]) A. de Moivre. De mensura sortis, seu, de probabilitate eventuum in ludi a casu fortuito pendentibus. (Philosophical Transactions, XXVII, 1711).

[4]) A. de Moivre. The doctrine of chances; or a method of calculating the probabilities of events in play. 1718 (herdrukt in 1738 en 1756).

[5]) A. de Moivre. Annuities upon lives. 1725 (herdrukt in 1743, 1750, 1752 en 1756).

[6]) J. du Saar. Een paar opmerkingen bij de werken van De Moivre (Archief voor de verzekeringswetenschap XVI, 1918, pag. 49).

J. du Saar. Een paar opmerkingen bij een artikel van Braun (De Verzekeringsbode, 40e jaargang, 1920, pag. 29).

J. du Saar. Nogmaals de werken van De Moivre. (De Verzekeringsbode, 40e jaargang, 1920, pag. 67.)

J. du Saar. De Moivre's werk over lijfrenten (De Verzekeringsbode, 41e jaargang, 1922, pag. 363).

werd. De Moivre's Annuities upon lives moet worden beschouwd als het eerste leerboek over verzekeringswiskunde en met en door De Moivre begint de verzekeringswetenschap als zoodanig beoefend te worden. Het ligt voor de hand dat de nieuwe wetenschap tijd noodig had om beoefenaren te krijgen, dit verklaart waarom een herdruk van het werk zoolang uitbleef. Dat deze echter toch noodig bleek is reeds een bewijs dat de beoefenaren zich in voldoende aantal hadden opgedaan. Het lijdt ook geen twijfel of we moeten onder hen vooral rekenen de vele leerlingen van De Moivre. Maar ook vijanden van hem bestudeerden zijn werk, mannen wie het te doen was om te zien of ze op het boek geen aanmerkingen konden maken. En het is vooral door toedoen van een tegenstander, Simpson [1]), dat de tweede druk uitkwam. Hierover straks nader.

We moeten de vijf uitgaven in drie rubrieken splitsen; de eerste uitgave staat op zichzelf; de tweede, derde en vierde verschillen zeer veel van de eerste maar zijn onderling nagenoeg gelijk; de vijfde staat weer in vele opzichten afzonderlijk. Voor een en ander zijn de oorzaken ook weer na te gaan.

Het zal bij het nagaan van de beteekenis die een werk heeft, in het algemeen er weinig toe doen welke druk men van het boek beschouwt; in het geval van De Moivre is dat echter anders. Waar we hier bedoelen om een uiteenzetting te geven van de groote beteekenis die het werk van De Moivre heeft voor de ontwikkeling van de verzekeringswetenschap mag zeker in aanmerking worden genomen de ontwikkeling die de schrijver zelf heeft medegemaakt en die uitkomt in het groote verschil tusschen de eerste uitgave en de latere.

§ 3. De verschijning van Annuities upon lives is meer dan het begin van de verzekeringswetenschap. Dit eerste leerboek over verzekeringswiskunde vormt, met alle gebreken die het natuurlijk ook heeft, nog altijd, meer dan men denkt, de grondslag waarop vele, ja alle, latere boeken steunen. Er worden verschillende kwesties in behandeld die men nog altijd in elk boek aantreft; vaak natuurlijk in verbeterden vorm, maar ook dat niet eens altijd.

De groote inleiding waarmede de eerste druk begint, doch die in de latere uitgaven geheel veranderd is, geeft een overzicht van de kwesties die hij wil behandelen. Daarbij treft de uitdrukking „de waarde van een leven". Behalve lijfrenten, verschillende soorten, zoowel op één als op meer levens, zal hij behandelen de „expectation of life",

[1]) J. du Saar. Thomas Simpson (De Verzekeringsbode, 41e jaargang, 1922, pag. 307).

waaromtrent hij dan meteen een uiteenzetting geeft, zooals wij die nog kennen.

§ 4. Hij begint dan zijn eigenlijke werk met de grondleggende opmerking dat men om de waarde van lijfrenten te bepalen rekening moet houden met den intrest die door een kapitaal wordt opgebracht en met de kans dat een of meer levens na langer of korter tijd bestaan. Daarmede moet elk leerboek over verzekeringswiskunde de berekeningen beginnen. En reeds bij dit eerste boek over lijfrenten moeten we den grootsten eerbied hebben voor den wiskundigen aanleg van De Moivre waar hij na die opmerking dadelijk alle aandacht wendt in de richting van het zoeken naar eenvoudige, overzichtelijke uitkomsten. Voor ons die nu eenmaal aan de D-kolom en de N-kolom gewend zijn is dat iets heel gewoons; maar men denke zich in de plaats van De Moivre, die niets anders bezat dan de getallen van Halley, gevonden met behulp van waarnemingen waarvan hij de betrekkelijke waarde goed inzag. Getallen bovendien die een grillig verloop vertoonen.

§ 5. Toch tracht hij van meet af aan de lezers te doen inzien dat die grillige getallen geen gevaar opleveren, doch alleen aanleiding geven tot somtijds langdurige berekeningen, al zijn die dan ook volstrekt niet moeielijk. Want hij legt den lezers, zonder wiskunde te gebruiken, ineens voor wat wij tegenwoordig nog neerschrijven in een betoog voor leeken, in boekjes of voordrachten waar wij aan niet-wiskundigen de berekening van een lijfrente willen duidelijk maken. Hij vertelt dat men jaar voor jaar de kontante waarde van het uit te keeren jaarbedrag moet vermenigvuldigen met de kans dat de lijfrentetrekker over 1, 2 enz. jaren nog leeft om dan die verschillende bedragen op te tellen. Hij komt dus tot onze uitdrukking voor de koopsom van een lijfrente (hij bespreekt om voor de hand liggende redenen de postnumerando lijfrente)

$$a_x = vp_x + v^2{}_2p_x + v^3p_{3x} + \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

Het zou tot 1785 duren alvorens Tetens [1]) door de invoering van het begrip van gediskonteerd aantal levenden ons het middel bracht om voor iedere willekeurige sterftetafel de lijfrente in korten vorm te berekenen.

§ 6. Zoover was De Moivre nog niet. Maar toch hinderde het hem dat de berekeningen lang zouden moeten duren en voor elken leeftijd onafhankelijk zouden moeten worden gemaakt. En op schitterende

---

[1]) J. N. Tetens. Einleitung zur Berechnung der Leibrenten und Anwartschaften, 1e deel (1785), pag. 89.

wijze geeft hij de methode aan om uit de lijfrente voor een bepaalden leeftijd die af te leiden voor den leeftijd daarvóór. De bekende formule

$$a_x = vp_x (1 + a_{x+1}) \qquad (2)$$

is dus even oud als de verzekeringswetenschap. Het pleit voor het heldere inzicht van De Moivre dat hij de afleiding geheel door redeneering, dus ook voor niet-wiskundigen, geeft. Veelal doet men tegenwoordig omgekeerd; men werkt eerst een of andere formule wiskundig uit en tracht dan, wanneer het resultaat in een overzichtelijken vorm komt te staan, dit ook door „eenvoudige redeneering" af te leiden zooals het in vraagstukken meestal heet.

§ 7. Hoewel De Moivre in 1725 dus deze formule heeft afgeleid wordt de uitvinding ervan door verschillende schrijvers aan anderen toegeschreven. Zoo beweert Milne [1]) dat Simpson in 1742 de formule het eerst heeft gegeven. Nu is een feit, dat Simpson de formule inderdaad vermeldt [2]), maar de geheele inrichting van zijn boek geeft duidelijk aan dat hij zijn kennis heeft opgedaan bij De Moivre; ik wil hier tevens nog opmerken dat Simpson in een later werk [3]), waarin wel een hoofdstuk komt met vraagstukken over lijfrenten, de formule nergens toepast.

Milne beweert ook nog dat de formule opnieuw gevonden werd door Euler in 1760. Het kan natuurlijk waar zijn dat Euler het werk van De Moivre niet gekend heeft, hoewel ik het betwijfel; immers Euler was een werkzaam lid van de Berlijnsche Akademie van Wetenschappen en tot de leden behoorde ook sedert 1735 De Moivre. De opvatting van Milne is echter begrijpelijk omdat Euler in zijn betrokken verhandeling [4]) de naam van De Moivre nergens noemt (zijn berekeningen zijn gegrond op de sterftetafel van Kersseboom) en de formule op een heel andere, wiskundige, wijze afleidt. Hij vergelijkt

$$a_x = \frac{1}{l_x}(vl_{x+1} + v^2 l_{x+3} + v^3 l_{x+4} + \ldots\ldots\ldots) \qquad (3)$$

met

---

[1]) J. Milne. A treatise on the valuations of annuities and assurances on lives and survivorships; on the construction of tables of mortality; and on the probabilities and expectations of life (1815), Introduction pag. XV.

[2]) Th. Simpson. The doctrine of annuities and reversions (1742) pag. 8.

[3]) Th. Simpson. Select exercises for young proficients in the mathematicks (1752).

[4]) L. Euler. Sur les rentes viagères. (Histoire de l'académie royale des sciences et belles-lettres, 1760, pag. 169).

$$a_{x+1} = \frac{\mathrm{I}}{l_{x+1}}(vl_{x+2} + v^2\, l_{x+3} + v^3\, l_{x+4} + \ldots\ldots) \quad (4)$$

en vindt uit (3)

$$\frac{\mathrm{I}}{v} l_x\, a_x = l_{x+1} + vl_{x+2} + v^2 l_{x+3} + \ldots\ldots$$

$$= l_{x+1} + l_{x+1}\, a_{x+1}$$

waaruit

$$a_x = v\frac{l_{x+1}}{l_x} + v\frac{l_{x+1}}{l_x}\, a_{x+1}$$

dus

$$a_x = v\frac{l_{x+1}}{l_x}(\mathrm{I} + a_{x+1}). \quad (5)$$

§ 8. Nu wordt door meer schrijvers aangenomen, dat Euler geen leiddraad had bij zijn studie over de lijfrenten ; of eigenlijk dat er bij de verschijning van Simpson's Select exercises van de beginselen van de verzekeringswetenschap in Duitschland nog niets bekend was. Zoo o.a. door Tetens [2], die overigens bij de afleiding van de formule [1]) in tegenstelling met zijn gewoonte om overal de litteratuur op te geven, in het geheel geen naam noemt. Teekenend is, dat hij wel vaak Simpson aanhaalt, maar De Moivre niet ; wellicht heeft hij, hetgeen hij van De Moivre wist, uit de werken van Simpson.

Ook Engelsche schrijvers, geven de eer van de formule aan Euler ; o.a. Galloway [3]. Daarentegen noemen Lubbock en Drinkwater [4], zooals door Gray wordt medegedeeld, [5] de formule in den vorm

$$a_{x+1} = \frac{vp_x}{a_x} - \mathrm{I} \quad (6)$$

met de opmerking, dat deze uitdrukking afkomstig is van G. Barrett, een tijdgenoot van Tetens. Ik heb het werk van Barrett nergens kunnen krijgen, houd het er echter voor dat hij, die goed met de litteratuur bekend was, toch de formule van zijn voorgangers heeft geleerd.

§ 9. Nog een andere lezing van het geval geeft Maseres, die in zijn elementaire werk [6]) zegt dat de methode voor de afleiding van a_x uit

[1]) J. N. Tetens l. c. Vorrede, pag. IX.

[2]) J. N. Tetens, l. c. pag. 116.

[3]) Th. Galloway. Treatise on probability (1839), pag. 93.

[4]) J. W. Lubbock & Drinkwater. Treatise on probability, pag. 36.

[5]) P. Gray. Things worth noting. (Journal of the Institute of Actuaries XII, 1866, pag. 176).

[6]) F. Maseres, The principles of the doctrine of life annuities explained in a familiar manner (1783), pag. XI.

a_{x+1} hem is medegedeeld door Price, maar gepubliceerd door W. Morgan [1]). Hij spreekt zichzelf tegen door ook te zeggen, dat Price zelf over de formule schreef [2]) en ook Simpson [3]). Bovendien is het niet waar wat hij zegt. Wel spreekt Price op de bewuste plaats over het verband tusschen een zekere koopsom en die voor één jaar jonger, doch het gaat dan over overlevingsrenten, waarover trouwens gelijk de naam aangeeft, het geheele boek handelt. En hetzelfde geldt voor de aangehaalde plaats bij Simpson, die zeker wel voor Price als bron heeft gediend ; Price roept overigens ook elk oogenblik Simpson als getuige.

Maseres heeft bij de kwestie toch wel aan De Moivre gedacht en het betreurd dat hij er bij hem niets over gevonden heeft. Hij heeft zelfs De Moivre in bescherming willen nemen. Vandaar zijn mededeeling dat hij vermoedt dat De Moivre de formule niet kende omdat hij anders wel niet zou gekomen zijn met een zekere onnauwkeurige onderstelling omtrent de levenskansen teneinde de berekeningen te bekorten. Het tegendeel is waar.

Hoe komt het nu, dat men over deze kwestie zooveel verschil van meening vindt, dat men zelfs kan beweren dat De Moivre de formule niet heeft gegeven? Alleen door de onbekendheid, niet met De Moivre's werk, maar door de onbekendheid met den eersten druk daarvan. Want in de verdere drukken heeft hij de afleiding weggelaten, trouwens roert hij het geheele geval niet meer aan. Dit werd eindelijk in 1844 door Farren opgemerkt [4]). Hij geeft aan De Moivre de eer die hem toekomt en voegt er bij, dat de formule in de latere drukken niet voorkwam waarschijnlijk omdat de schrijver het als onnoodig beschouwde, tot voordeel van het gebruik van zijn sterfteformule.

§ 10. Vereenvoudiging van het werk gold voor De Moivre als een voornaam punt. Alleen aan dat streven hebben we nog een ander belangrijk resultaat te danken, misschien wel het belangrijkste dat hij ons heeft gegeven. Het is zijn eenvoudige onderstelling omtrent het verloop van de levenskansen. Hij trachtte uit de getallen in de tafel

---

[1]) W. Morgan. The doctrine of annuities and assurances on lives and survivorships, stated and explained. 1779, pag. 56. Het boek werd verschillende malen herdrukt.

[2]) R. Price. Observations on reversionary payments. (1769). Ook dit boek werd herhaaldelijk herdrukt; de latere uitgaven (6e en 7e) bewerkt door zijn neef W. Morgan. Ik heb hier gebruikt de 7e druk van 1812, pag. 382.

[3]) Th. Simpson. The doctrine of annuities, pag. 18.

[4]) E. J. Farren. Historical essay on the rise and early progress of the doctrine of life-contingencies in England (1844).

van Halley [1]) iets regelmatigs te vinden en vond dit door de opmerking dat van 12 tot 22 jaar, van 29 tot 42 jaar, van 42 tot 49 jaar, van 54 tot 70 jaar de levenskansen na 1, 2 enz. jaar telkens een rekenkundige reeks vormen, terwijl het voor de tusschenliggende tijdvakken nagenoeg zoo is. Hij kwam daaruit tot het denkbeeld om na te gaan welk verschil het zou maken met de werkelijke uitkomsten, volgens de tafel van Halley, wanneer hij over de geheele rij de levenskansen als een rekenkundige reeks beschouwde. En eerst nadat hij had gevonden dat de uitkomsten niet noemenswaard verschillen met die volgens de getallen van Halley en daarbij in aanmerking nemend de eenvoudigheid waartoe zijn onderstelling aanleiding gaf, ging hij er toe over de uitdrukking neer te schrijven, welke we ook kunnen geven in de gedaante die aangeeft dat het aantal levenden een rekenkundige reeks vormt, in de gedaante

$$l_x = 86 - x \qquad (7)$$

§ 11. Degenen die deze formule afkeurden op grond van de onnauwkeurigheid — het zijn veelal de aanhangers van Simpson — vergaten de bedoeling die De Moivre had en vergaten dat zij over meer en beter tafels te beschikken hadden dan De Moivre. Degenen die in later tijden nog met weinig waardeering over de formule spraken vergaten dat ook met deze eenvoudige uitdrukking in het eerste boek over verzekeringswiskunde De Moivre de wegbereider is van al degenen die getracht hebben het verloop van de sterfte voor te stellen als een analytische funktie. De eerste schrijver over verzekeringswiskunde gaf de eerste sterfteformule en deze zal, gelijk Baily [2]) het terecht uitdrukt „ever remain a monument of the ingenuity and abilities of its illustrious inventor”. Ieder van ons is overtuigd van de groote waarde van de formule van Makeham ; zou deze niet geprofiteerd hebben van De Moivre's eenvoudige onderstelling? De bestrijders doen dit op grond van dingen die met de formule zelf niet te maken hebben. Over de onnauwkeurigheid van de formule zelf zeggen ze niet veel, maar ze vinden minder goede uitkomsten wanneer ze de formule toepassen voor de berekening van lijfrenten op twee en meer hoofden ; het zijn vooral Simpson [3]) en Price [4]). Hun aanmerking is niet toelaatbaar ; immers De Moivre zelf gebruikt de formule niet voor lijfrenten op meer hoofden, maar ging daarvoor, ook al weer

[1]) E. Halley, l. c.
[2]) F. Baily. The doctrine of life-annuities and assurances etc. (1810) pag. 313.
[3]) Th. Simpson. The doctrine of annuities, pag. 25 e. v.
[4]) R. Price, l. c.

terwille van de eenvoudigheid zonder de nauwkeurigheid uit het oog te verliezen, van een andere onderstelling uit, n.l. dat de aantallen levenden een meetkundige reeks vormen. Hoezeer getracht werd om hem afbreuk te doen blijkt o.a. uit het feit, dat Price beweert dat De Moivre wel in zijn eersten druk die tweede onderstelling heeft opgenomen maar deze in de volgende drukken, tengevolge van opmerkingen van Simpson heeft weggelaten. Er is niets van waar.

§ 12. De afleiding van de koopsom voor de lijfrente geeft hij op voor zijn tijd fraaie wijze, daarbij verwijzende naar door hem behandelde reeksen in zijn vroegere werk over kansrekening [1]). Hij volgde nog de toen veel gebruikte manier om, ten behoeve van minder gevorderden, eerst de regel aan te geven in woorden en daarna het bewijs. De bewijzen zijn naar onze begrippen echter vaak onduidelijk of omslachtig. Wij zouden kunnen zeggen, als we voor $86 - x$ (of in het algemeen $\omega - x$, wanneer ω den hoogsten leeftijd in de sterftetafel voorstelt) de door De Moivre ingevoerde naam levenskomplement aannemen en $\omega - x = n$ stellen, dat het aantal levenden na 1, 2 enz. jaar resp. $n - 1$, $n - 2$, enz. bedraagt. Men vindt dan daaruit:

$$a_x = \frac{1}{n}\left[v(n-1) + v^2(n-2) + \ldots\ldots + v^n(n-n)\right]$$

dus

$$a_x = (v + v^2 + \ldots + v^n) - \frac{1}{n}(v + 2v^2 + 3v^3 + \ldots + nv^n)$$

of

$$a_x = a_{\overline{n}|} - \frac{1}{n}(Ia)_{\overline{n}|} \qquad (8)$$

hetgeen om te zetten is [2]) in

$$a_x = a_{\overline{n}|} - \frac{1}{n}\left(a_{\overline{n}|} + \frac{a_{\overline{n}|} - nv^n}{i}\right)$$

of

$$a_x = \left(a_{\overline{n}|} - \frac{v^n}{n}\right) - a_{\overline{n}|}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{ni}\right)$$

En maakt men in de eerste haak gebruik van

$$a_{\overline{n}|} = \frac{1 - v^n}{i} \qquad (9)$$

[1]) A. de Moivre. The doctrine of chances (1817) pag. 132.

[2]) Voor de beteekenis van $(Ia)_{\overline{n}|}$ zie men:

R. Todhunter. Institute of Actuaries' Text Book, Part I (1901), pag. 41.

M. van Haaften. Beschouwingen over politieke rekenkunde (1912), pag. 27.

dan krijgt men

$$a_x = \frac{1}{i} - \frac{a_{\overline{n}|}}{nvi} \tag{10}$$

zijnde de vorm waarin De Moivre de uitkomst geeft.

Door toepassing van deze uitkomst vindt men bij de berekening van verschillende andere koopsommen ook zeer eenvoudige resultaten; we gaan er hier niet op in, te eerder omdat De Moivre bij lijfrenten blijft.

§ 13. Volgens een overeenkomstige redeneering leidt De Moivre ook tijdelijke lijfrenten af en deze past hij dan toe om, zonder de oorspronkelijke methode te wijzigen de uitkomsten nauwkeuriger te maken. Hij splitst de leeftijden in groepen, voor welke de afname van het aantal levenden inderdaad volgens zijn formule geschiedt (terloops zij opgemerkt, dat het eerste boek over verzekeringswiskunde ook de eerste grafische voorstelling bevat van het aantal levenden, voor deze kwestie een gebroken lijn) en berekent de waarde van een lijfrente voor een zekeren duur als de som van de waarden voor de verschillende tijdvakken; daarbij komt tevens de uitgestelde lijfrente aan de orde.

Passen wij niet allen bij het in rekening brengen van een deel van een termijn, d. w. z. voor het vergoeden van een evenredig deel voor de tijd van het jaar (of andere termijn) tusschen de laatste uitkeering aan de verzekerde en zijn sterfdag, dus bij de zoogenaamde komplete lijfrente, de formule van De Moivre toe? De Moivre zelf heeft ons dat geleerd, doch nog niet in den eersten druk van zijn werk; zie hieronder in § 20.

§ 14. Alvorens over die verdere drukken te spreken, moge nog een enkel woord gezegd worden over den verderen inhoud van de eerste. Het werk draagt de kenteekenen van een nieuw boek, is niet vrij van slordigheden. De stof is behandeld in de vorm van vraagstukken, genummerd tot 27; het zijn er echter 28, daar tweemaal achtereen een nummer 7 voorkomt. Na de opgave volgt dadelijk de oplossing (solution) d. w. z. hoe men uit de gegevens het antwoord kan vinden, daarna komt de verklaring (demonstration), somtijds gevolgd door een of andere „corollary" of „remark". Ruime plaats wordt ingenomen door de lijfrenten op meer hoofden en door de vraagstukken over de „expectation of life", ook voor meer levens.

Tafels voor lijfrenten zijn niet opgenomen; alleen is afgedrukt de sterftetafel van Halley en een tabel voor de kontante waarde van een annuïteit met een duur van 1 tot en met 100 jaar en voor een rentevoet van 5 %, welke in alle problemen is gebruikt.

§ 15. Zooals reeds werd opgemerkt schijnt het werk van De Moivre in zijn oorspronkelijke uitgave aan velen onbekend te zijn gebleven. De verschijning van een tweede uitgave is dan ook behalve aan de daarvoor gebruikelijke oorzaken mede te danken aan het feit dat een ander boek over hetzelfde onderwerp verscheen. Het is lang niet onmogelijk dat De Moivre zonder die bijkomstige omstandigheid niet de moeite van een omwerking van zijn boek zou hebben aanvaard; hij was n.l. intusschen 75 jaar geworden en niet in al te goede gezondheid.

Het bewuste boek is dat van Simpson in 1742 [1]). Nu was de stemming van De Moivre tegenover Simpson reeds niet al te best. In 1740 was er van de hand van Simpson reeds een werk verschenen over kansrekening [2]). De Moivre meende dat het niet anders was dan een verkorte uitgave van zijn eigen werk van 1738 [3]) over die leer en geheel ongelijk had hij niet; ook bevoegde beoordeelaars als Cantor [4]) en Todhunter [5]) denken er zoo over. Hij had echter verstandiger gedaan het als een eer te beschouwen dat men uit zijn werk putte en te bedenken, dat de bedoeling van Simpson, die veel lessen gaf, was om de leer voor minder gevorderden bereikbaar te maken.

Al was dus De Moivre boos op Simpson, omgekeerd gaf Simpson aan zijn ouden leermeester alle eer. In zijn werk van 1742 spreekt hij in zijn voorrede in termen als „because such are often times made use of to very great advantage, of which Mr. De Moivre's excellent book on this subject is an instance."

§ 16. De verschijning van Simpson's nieuwe boek deed de woede van De Moivre nog grooter worden; een twistgeschrijf volgde, waarbij De Moivre op heftige wijze te keer ging, doch Simpson geheel korrekt bleef [6]). In deze kwestie is ongetwijfeld De Moivre wat te ver gegaan; wel is de vorm waarin Simpson zijn werk giet ongeveer dezelfde als die in De Moivre's boek, maar de stof is anders en er komen nieuwe punten in voor.

We kunnen ons inmiddels over de ruzie slechts verheugen, omdat

[1]) Zie noot 12.
[2]) Th. Simpson. The nature and laws of chance (1740).
[3]) Zie noot 6.
[4]) M. Cantor. Vorlesungen über Geschichte der Mathematik III (1901), pag. 636.
[5]) J. Todhunter. A history of the mathematical theory of probability (1865) pag. 206.
[6]) J. E. Montucla. Histoire des mathématiqûes III (1802), pag. 414.

we daaruit zeker de spoedig daarop, in 1743, verschenen tweede druk van De Moivre's boek moeten afleiden. Hij kan niet laten om daarin allerlei hatelijkheden in de voorrede op te nemen. Men leest :

„After the pains I have taken to perfect this Second Edition, it may happen, that a certain Person, whom I need not name (de ruzie schijnt in wijde kring bekend te zijn geweest) *out of Compassion to the Public*, will publish a Second Edition of his Book on the same Subject, which he will afford at a *very moderate Price*, not regarding whether he mutilates my Propositions, obscures what is clear, makes a Shew of new Rules, and works by mine ; in short, confounds, in his usual way, every thing with a croud of useless Symbols ; if this be the Case, I must forgive the indigent Author, and his disappointed Bookseller."

Volgens Baily [1]) weersprak nog in hetzelfde jaar Simpson opzettelijk de beschuldigingen in een Appendix tot zijn Doctrine of Annuities ; hij besluit met de woorden : „I appeal to all mankind, whether, in his treatment of me, he has not discovered an air of self-sufficiency, ill-nature, and inveteracy, unbecoming a gentleman." Dit afzonderlijke Appendix is me niet bekend ; het is opgenomen achter in de tweede uitgave (1775) van Simpson's werk. Doch dat is wel wat overbodig. Want de woede van De Moivre was al lang bekoeld. In de derde uitgave (1750) en later is alles wat op de kwestie betrekking had, weggelaten.

§ 17. De nieuwe uitgave van De Moivre's werk kan men grootendeels als een geheel nieuw boek opvatten en daarom mag er een en ander over gezegd worden, te meer omdat er weer nieuwe punten in behandeld worden waarin hij onze eerste voorganger was.

Vooraf ga echter de mededeeling dat de derde (1750) en de vierde uitgave (1752) behoudens een paar verbeteringen gelijk zijn aan de tweede. Het werk was inmiddels meer bekend geworden, mede door toedoen van Dodson, een leerling van De Moivre. Doch de schrijver was een oude, hulpbehoevende man geworden, niet meer in staat om een nieuwe uitgave van een boek naar behooren tot stand te brengen. Vandaar de vrijwel onveranderde herdrukken. Ook tal van fouten zijn blijven staan, zelfs de foutieve nummering van de vraagstukken (10, 11, 12, 11, 12, 13 en 16, 18, 17, 18).

In de tweede uitgave is vraagstuk XXV foutief ; hij bespreekt dat

[1]) F. Baily. The doctrine of life-annuities and assurances (herzien door H. Filipowski, 1864) pag. 5.

in een latere verhandeling [1]) ; in de volgende drukken is het door een ander vraagstuk vervangen. Er zijn nu ook tafels opgenomen van annuïteiten en van lijfrenten voor 4, 5 en 6 %, in de latere ook voor 3 en $3\frac{1}{2}$ %.

Het groote verschil tusschen de eerste en de tweede uitgave is wel de wijze van behandeling. De bewijzen zijn uitgebreider geworden en in een Appendix afzonderlijk gehouden, hetgeen het werk ten goede komt. Het aantal vraagstukken is vermeerderd tot 33.

§ 18. Wat in de nieuwe uitgave als nieuw onderwerp voorkomt is juist weer iets oorspronkelijks. Hij spreekt over de lijfrente in termijnen en zegt op pag. 73, dat hoewel hij de lijfrenten in zijn boek heeft berekend onder aanname dat de betalingen jaarlijks geschieden, er gevallen zijn waarin dat halfjaarlijks geschiedt en dat hij daarom twee problemen heeft opgenomen :

1). hoe groot de halfjaarlijksche betaling wordt, wanneer de oorspronkelijke koopsom blijft ;

2). hoe groot de koopsom wordt, indien elk halfjaar de helft wordt betaald voor de oorspronkelijke som.

Maar hij lost dan de problemen op niet voor lijfrenten, doch voor annuïteiten ; dit doet echter aan de waarde van zijn vondst niets af. Bovendien maakt hij de kwestie algemeen, voor meer termijnen.

Als antwoord op de eerste vraag geeft hij, dat men voor 4, 5 en 6 % respektievelijk moet nemen de helft van het jaarbedrag verminderd met resp. $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{80}$ en $\frac{1}{68}$ van dit halfjaarsbedrag. Voor de tweede vraag vindt hij als koopsom de oorspronkelijke verhoogd met resp. $\frac{1}{99}$, $\frac{1}{79}$ en $\frac{1}{67}$. In zijn latere bewijs blijkt dat dit benaderde antwoorden zijn. Dat bewijs is zooals het moet zijn ; in tegenwoordig teekenschrift en ontdaan van omslachtigheid :

$$a_{\overline{n}|} = \frac{1 - v^n}{i}$$

$$\overset{(2)}{a_{\overline{n}|}} = \tfrac{1}{2} v^{\frac{1}{2}} \frac{1 - (v^{\frac{1}{2}})^{2n}}{1 - v^{\frac{1}{2}}}.$$

dus moet men hebben

$$\frac{1 - v^n}{i} = \tfrac{1}{2} x v^{\frac{1}{2}} \frac{1 - v^n}{1 - v^{\frac{1}{2}}}$$

[1]) A. de Moivre. A short method of calculating the value of annuities on lives, from tables of observations (Philosophical Transactions, 1745, No. 473). Ook als Appendix in de 3e uitgave van 1756 van de Doctrine of Chances, pag. 337.

waaruit

$$\tfrac{1}{2}x = \frac{(1+i)^{\frac{1}{2}} - 1}{i} \qquad (11)$$

hetgeen bijv. voor 4 % oplevert

$$\tfrac{1}{2}x = \frac{0{,}019804}{0{,}04}$$

hetgeen hij dus heeft afgerond tot $\frac{198}{400} = \frac{1}{2} - \frac{1}{200}$.

§ 19. We achten het niet noodig ook de andere benaderingen af te leiden, doch willen liever nog even spreken over de uitkomst voor meer termijnen. Hij vindt dan voor het tweede vraagstuk voor een verdeeling van het jaar in t termijnen, zonder de afleiding te vermelden, de ons bekende uitdrukking

$$a^{(t)}_{\overline{n}|} = \frac{1}{t} \frac{1 - v^n}{(1+i)^{\frac{1}{t}} - 1} \qquad (12)$$

De vermelding hiervan is van belang om hetgeen hij er dadelijk op laat volgen. Het is: „But it is known, that if t represents an infinite Number, such as is the Number of Instants in one Year, then $r^{\frac{1}{t}} - 1 = \frac{1}{t} \log r$". Hij gebruikt r voor $1 + i$; hij vindt dan

$$\bar{a}_{\overline{n}|} = \frac{v^n - 1}{\lg v} \qquad (13)$$

Daarmede heeft hij wederom iets voorbereid; hij is de eerste die de kontinue methode gebruikt. Niet Simpson zooals door sommigen beweerd wordt o.a. door Jörgensen [1]), die anders een groot voorstander van de kontinue methode is en goed in de litteratuur thuis is; in diens werk van 1742 komt er niets over voor. Wel in zijn Select Exercises van 1752; hij eindigt dat werk met de oplossing van een paar „of the most useful Problems, according to a Method very different from that whereby they are usually investigated" [2]). Het zijn hier vraagstukken, die opgelost worden met behulp van de differentiaal- en integraalrekening en waarin ook levenskansen voorkomen. Toch komt aan Simpson alweer niet de eer toe de eerste te zijn geweest die dit deed.

§ 20. We dienen daartoe nog het licht te doen schijnen op een an-

---

1) N. R. Jörgensen. Grundzüge einer Theorie der Lebensversicherung. (1913) pag. 26.

2) Th. Simpson. Select exercises, pag. 324.

der punt in De Moivre's werk waarin hij onze voorganger is geweest; we hebben het aan het slot van § 13 al aangestipt. Na de afleiding van de koopsom voor de gewone lijfrente in de gedaante $a_x = \frac{1}{t} - \frac{a_{\overline{n|}}}{nvi}$ (zie § 12) laat hij voor het eerst in zijn tweede uitgave (1743) volgen [1], dat, wanneer verlangd wordt dat bij overlijden van den lijfrentenier een deel van de lijfrente zal worden betaald naar verhouding van de tijd verloopen tusschen het begin van het laatste jaar en het tijdstip van overlijden, de koopsom zal zijn (in ons teekenschrift)

$$\mathring{a}_x = \frac{1}{i} + \frac{a_{\overline{n|}}}{n \lg v} \qquad (14)$$

Bewijs van deze uitkomst geeft hij niet. Alleen vermeldt hij „because there are no tables printed of hyperbolic Logarithms, and that the Reduction of a common Logarithm to a hyperbolic is somewhat laborious" de waarden lg 1,04 = 0,03922, lg 1,05 = 0,04879, en lg 1,06 = 0,05825 of — eenvoudigheid is en blijft altijd De Moivre's streven — resp. ongeveer $\frac{2}{51}$, $\frac{2}{41}$ en $\frac{6}{103}$.

§ 21. Destijds werd het ontbreken van dat bewijs reeds een kwestie waar de aandacht op viel van Jones [2]. De Moivre had hem toen geantwoord, dat het bewijs in zijn boek te veel plaats in zou nemen, maar dat hij het bewijs alsnog zou geven en dit geschiedde dan ook in een brief aan Jones in 1744, opgenomen in de Philosophical transactions van 1745 [3]. En bij dat bewijs gebruikt hij ook de „theory of fluxions", zoodat hij daarmede Simpson eenige jaren voor was. Er komt tevens voor het eerst de integratie van de algemeene exponentiaalfunktie voor. Zijn redeneering is nog heden te gebruiken, maar we zullen een eenvoudiger manier van berekening volgen.

Stel t een zeker deel van het levenskomplement van een x jarige. Daar men van $\omega - x = n$ personen uitgaat, is de kans om die tijd t te doorleven gelijk aan $\frac{n-t}{n}$ en de kans om in het daaropvolgende tijdsdeel dt te sterven $\frac{n-t}{dt}$. De kans, dat een x-jarige de tijd t door-

[1] pag. 86.

[2] William Jones (1680—1749) was een intieme vriend van Newton en Halley en interesseerde zich zeer voor de arbeid van De Moivre; hij was herhaaldelijk ondervoorzitter van de Royal Society.

[3] Zie noot 38.

leeft en dan dadelijk daarna sterft, is dus

$$\frac{n-t}{n} \cdot \frac{dt}{n-t} = \frac{dt}{n} \tag{15}$$

Voor de komplete lijfrente vindt men dus

$$\mathring{a}_x = \int_n^0 \frac{dt}{n} a_{\overline{t|}} \tag{16}$$

of

$$\mathring{a}_x = \int_0^n \frac{dt}{n} \frac{1 - v^t}{i} \tag{17}$$

waaruit

$$\mathring{a}_x = \frac{1}{i} - \frac{1}{ni} \int_0^n v^t \, dt \tag{18}$$

of

$$\mathring{a}_x = \frac{1}{i} + \frac{1 - v^n}{ni \; lg \, v} \tag{19}$$

of

$$\mathring{a}_x = \frac{1}{i} + \frac{a_{\overline{n|}}}{n \, lg \, v} \tag{20}$$

Was De Moivre nu nog één stap verder gegaan, en had hij bij deze berekening de door hem gekende kontinue annuïteit gebruikt, dan zou hij uit de komplete lijfrente ook tot de waarde van de kontinue lijfrente zijn gekomen, nl.

$$\bar{a}_x = -\frac{1}{lg \, v} - \frac{\bar{a}_{\overline{n|}}}{n \, lg \, v} \tag{21}$$

of

$$\bar{a}_x = -\frac{1}{lg \, v} + \frac{1 - v^n}{n \; lg^2 \, v} \tag{22}$$

§ 22. Dat hij zich niet blind staarde op zijn onderstelling omtrent het regelmatig afsterven, blijkt uit de beschouwingen die hij aan de laatste afleiding toevoegt; hij gaat uitvoerig na hoe groot het zoogenaamde evenredige deel is dat moet worden uitgekeerd bij overlijden ook wanneer andere onderstellingen omtrent de afsterving worden gemaakt.

In de derde en in de vierde uitgave wordt het in § 21 bedoelde bewijs toch niet gegeven; de schrijver bleef zeker bij zijn meening, dat het niet in het kader van het werk paste. Wel komt het voor, trouwens de geheele brief aan Jones, in de uitgave van de Doctrine of chances van 1756.

§ 23. En zoo komen we vanzelf tot de vijfde uitgave van het werk over lijfrenten. Het schijnt, dat al blijkt er niet veel van in de derde en in de vierde uitgave, dat De Moivre toch wel aanteekeningen had verzameld over verbeteringen en aanvullingen die noodig waren en dat hij in zijn laatste levensjaar met een van zijn vrienden (Dodson?) eenige van die punten had besproken. Aan dezen liet hij bij zijn overlijden in 1754 zijn met kantteekeningen voorziene exemplaar na.

Dat de werken van De Moivre algemeen waardeering ondervonden blijkt wel hieruit dat na zijn dood een herdruk noodig was, welke door den hier genoemden vriend werd bezorgd. D. w. z. een derde druk van The doctrine of chances, waarbij mede werd opgenomen het werk over lijfrenten. Om deze opname te rechtvaardigen werd boven de bladzijden van het laatste overal afgedrukt „The doctrine of chances applied to the Valuation of Annuities". Men kan er een voortbouwen in zien op hetgeen De Moivre zelf reeds had gedaan, toen hij in de tweede uitgave van zijn kansrekening het gedeelte had opgenomen dat bepaaldelijk handelt over levenskansen.

§ 24. De uitgave van 1756 geeft weinig aanleiding tot opmerkingen. Men vindt er duidelijk de verbeterhand die werkzaam is geweest. Behalve de toevoeging van den hierboven genoemden brief aan Jones, vindt men nog, ook in verband daarmede, een nieuw hoofdstuk opgenomen waarin hij nogmaals terugkomt op de kwestie van zijn sterfte formule en zijn desbetreffende beschouwingen die voerden tot de voorstelling van het verloop van het aantal levenden door een gebroken lijn („polygon figure").

Het aldus herziene werk bleef geacht. Er verscheen in 1776 [1]) een Italiaansche vertaling. Ik heb bij de bewerking van dit opstel de vijf door mij besproken uitgaven alle in handen gehad (hetgeen niet gemakkelijk was, daar ze nogal zeldzaam zijn), maar de bewuste vertaling heb ik nergens kunnen vinden. Ik heb dus niet kunnen nagaan of — de titel wekt twijfel — er inderdaad de lijfrenten in behandeld zijn. De vermelding is van Czuber [2]), die mededeelt dat er door de

---

1) Gaeta & Fontana. La dottrina degli azardi (1776).

2) E. Czuber. A. de Moivre's Abhandlung über Leibrenten (Versicherungswissenschaftliche Mittteilungen, 1906).

vertalers een inleiding bij is geschreven waarin een overzicht wordt gegeven van den stand van de kennis op het betrokken gebied en van de litteratuur.

Latere uitgaven zijn niet bekend, maar het werk bleef de bron waaruit iedereen putte; in de 18e eeuw Price en Morgan — om in ons land te blijven Strabbe [1]) — in de 19e eeuw eigenlijk iedereen, en terecht. De bedoeling van deze verhandeling is om op de grondleggende gedachten van De Moivre de aandacht te vestigen. Zijn werk moet beschouwd worden als een werk van den eersten rang; daarbij komt nog dat er onder de vele problemen die hij behandelt, verschillende zijn die uit wiskundig oogpunt nadere bestudeering ten volle waard zijn.

Utrecht, Oktober 1922 Dr. J. du SAAR

---

[1]) A. B. Strabbe. Oeffenschool der mathematische weetenschappen Deel I (1770).
Hf. Uit de geschiedenis van het Wiskundig Genootschap IV (De Verzekeringsbode, 40e jaargang, 1921, pag. 289).